# TD 10 : Ensembles Indications

Dans tout ce TD, $E$ est un ensemble quelconque.

## Écriture des ensembles

**1** ★★☆ On note $A = \left\{ x - \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in [1, +\infty[ \right\}$. Montrer que $A = \mathbb{R}_+$.

On peut s'inspirer d'un exemple similaire du cours.

**2** ★★ Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - y = -1 \right\}$$

$$B = \left\{ (t+1, 4+3t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Raisonner par double inclusion et bien utiliser les caractérisations de l'appartenance.

**3** ★★ Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

$$A = \left\{ \frac{u}{\overline{u}} \;\middle|\; u \in \mathbb{C}^* \right\} \text{ et } B = \mathbb{U}$$

Raisonner par double inclusion et bien utiliser les caractérisations de l'appartenance. Pour l'inclusion de $B$ dans $A$, utiliser la forme exponentielle.

**4** ★★★ On pose

$$A = \left\{ z + \overline{z} \;\middle|\; |z| = 1 \right\}$$

$$B = [-2, 2]$$

$$C = \left\{ u + v \;\middle|\; u, v \in \mathbb{C},\ uv = 1 \text{ et } |u| = |v| \right\}$$

1) Montrer que $A \subset B$.
2) Montrer que $B \subset C$.
3) Montrer que $C \subset A$.
4) Que peut-on en déduire sur $A$, $B$ et $C$ ?

1) Utiliser la formule $z + \overline{z} = \dots$

2) Soit $x \in B$. On cherche donc $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}$ tels que $x = u + v$, $uv = 1$ et $|u| = |v|$. Ces informations nous donnent la valeur de $u + v$ et la valeur de $uv$ ! Comment résoudre un système de la forme $\begin{cases} u + v = \dots \\ uv = \dots \end{cases}$ ? À vous de jouer.

3) C'est l'inclusion la plus difficile. Soit $x \in C$. Montrons que $x \in A$. On sait qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $x = u + v$ avec $uv = 1$ et $|u| = |v|$. On cherche ensuite $z$ de module 1 tel que $x = z + \overline{z}$. Plutôt que d'exprimer $z$ en fonction de $x$, on peut le construire en fonction de $u$ et de $v$. Donc on part de $z + \overline{z} = u + v$.

   Montrer d'abord que $u, v \in \mathbb{U}$. Ensuite, exprimer $v$ en fonction de $\overline{u}$.

## Ensembles et logique

**5** ★ Soit $F$ un sous-ensemble de $E$ et $P$ un prédicat défini sur $E$. Compléter les lignes ci-dessous par $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$ selon ce qui est approprié :

$$\forall x \in E \quad P(x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \forall x \in F \quad P(x)$$

$$\exists x \in E \quad P(x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \exists x \in F \quad P(x)$$

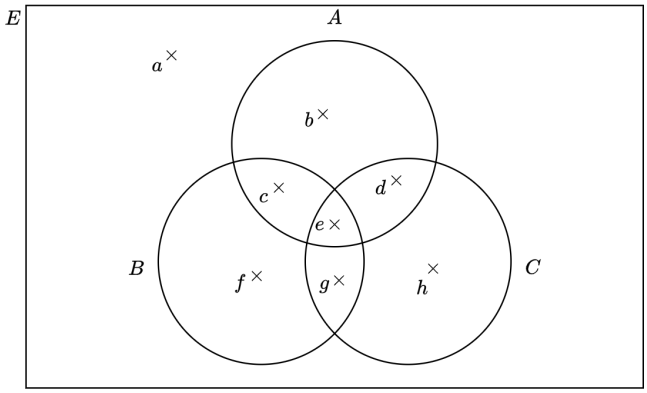
**6** ★★ Soit $F$ un sous-ensemble de $E$ et $P$ un prédicat défini sur $E$. Donner toutes les implications qui sont valides entre les assertions $A, B, C, D$ suivantes :

$$\begin{array}{lllll} A : & \forall x \in E & \exists y \in E & P(x,y) \\ B : & \forall x \in E & \exists y \in F & P(x,y) \\ C : & \forall x \in F & \exists y \in E & P(x,y) \\ D : & \forall x \in F & \exists y \in F & P(x,y) \end{array}$$

Il faut que ces implications soient valides en toute généralité. Par exemple $A \Longrightarrow C$ : si pour tout $x$ dans $E$, il existe un $y \in E$ tel que $P(x,y)$, alors *a fortiori* cela est aussi vrai pour tout $x$ dans $F$, car $F \subset E$.

## Opérations sur les ensembles

**7** ★★☆ On considère un ensemble $E$ à 8 éléments dénotés $a,b,c,d,e,f,g,h$. On définit $A$, $B$ et $C$ trois sous-ensembles de $E$ selon le schéma ci-dessous :




1) Déterminer les ensembles $A \cap C$ et $B \setminus (A \cup C)$.
2) En les écrivant différemment avec les lois de Morgan, déterminer les ensembles $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
3) Donner une partition de $A$ en quatre ensembles, qu'on exprimera en fonction de $A$, $B$ et $C$ (ou de leurs complémentaires).
4) Écrire l'ensemble $\{c,d,g\}$ en fonction de $A$, $B$ et $C$ (ou de leurs complémentaires).

3) Il n'y a qu'une seule partition de $A$ en quatre ensembles : ce sont les quatre points de $A$ !
4) Réécrire $\{c\}$ en fonction de $A$, $B$ et/ou $C$ puis faire de même pour $\{d\}$ et $\{g\}$. Comment obtenir ensuite l'ensemble $\{c,d,g\}$ ?

**8** ★★ Montrer les équivalences suivantes (attention, c'est long !) :

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B$$

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$$

C'est un exercice de méthode :
- Pour montrer une équivalence, raisonner par double implication.
- Pour montrer une égalité d'ensemble, raisonner par double inclusion.
- Pour montrer une inclusion, utiliser la caractérisation.

Penser aussi à se servir d'inclusions "évidentes", telles que $A \subset A \cup B$.

**9** ★★ Simplifier les ensembles suivants :

1) $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ]-n,n[$
2) $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n},n\right]$
3) $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]0,1+\frac{1}{n}\right[$

Pour chaque ensemble, essayer de deviner quel serait l'ensemble simplifié, puis raisonner par double inclusion.

## Ensemble $\mathscr{P}(E)$

**10** ★★☆ Que vaut $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$ ?

Déterminer $\mathscr{P}(\{1\})$ dans un premier temps. Pour y voir plus clair, on pourra poser $a_1, a_2, \cdots$ les différents éléments de $\mathscr{P}(\{1\})$ pour ensuite calculer sereinement $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$.

**11** ★★ Soit $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1) $\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
2) $\mathscr{P}(A \cap B) \supset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
3) $\mathscr{P}(A \cup B) \subset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$
4) $\mathscr{P}(A \cup B) \supset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

C'est moins difficile que ça en a l'air ! Utiliser les caractérisations.

**12** ★★★ Soit $E$ un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$ :

1. $A \cup X = B$
2. $A \cap X = B$

Raisonner par analyse-synthèse. Trouver d'abord une condition nécessaire sur $A$ et $B$ pour qu'une solution $X$ puisse exister. Faire des dessins peut grandement aider.